Unidad III: Transformada de Laplace

3.1 Teoría preliminar

3.1.1 Definición de la transformada de Laplace

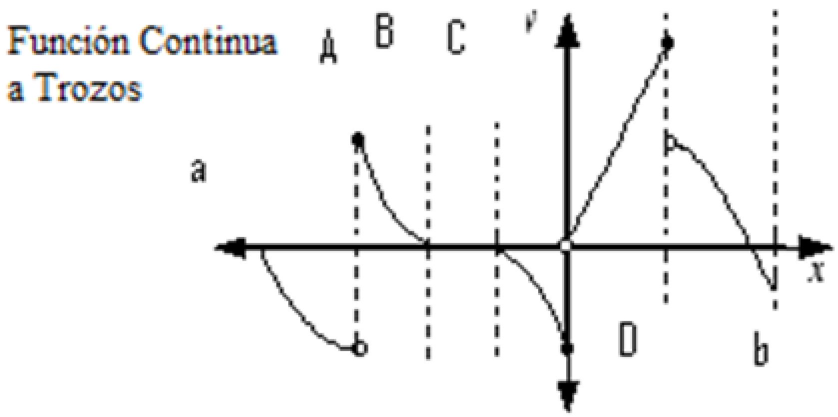
Las transformadas de Laplace fueron formuladas para transformar una ecuación diferencial que contiene las diferenciales de una función indefinida, a partir de una ecuación t-espaciada hacia una ecuación s-espaciada que puede ser resuelta con mucha facilidad. También pueden ser utilizadas para resolver un sistema de ecuaciones diferenciales. Están dirigidas a una amplia gama de problemas de valor inicial.

La transformada de Laplace se denomina a veces transformada operacional; esto esporque transforma las operaciones de integración en simples operaciones algebraicas que son mucho más convenientes de resolver. Después de la cual la aplicación de la técnica de la transformada inversa produce la solución exacta para la ecuación diferencial dada.

3.1.2 Condiciones suficientes de existencia para la transformada de Laplace

Antes de establecer las condiciones para la existencia de la transformada de Laplace es esencial entender dos conceptos fundamentales que constituyen la base de la transformada de Laplace. Estos son:

1. Función continua a trozos: Se dice que una función es a trozoso seccionalmente continua en un intervalo finito a <= t <= b si el intervalo se puede subdividir en un número finito de subintervalos, en cada uno de los cuales f(t) es continua y tiene límites izquierdos, así como límites derechos.



Considera una función f(t) que es continua a trozos en [a, b], pero presenta discontinuidades en algunos puntos.

3.2 Transformada directa

Uno de los algoritmos aritméticos más ampliamente utilizados es la transformada rápida de Fourier, un medio eficaz de ejecutar un cálculo matemático básico y de frecuente empleo. La transformada rápida de Fourier es de importancia fundamental en el análisis matemático y ha sido objeto de numerosos estudios. La aparición de un algoritmo eficaz para esta operación fue una piedra angular en la historia de la informática.

Las aplicaciones de la transformada rápida de Fourier son múltiples. Es la base de muchas operaciones fundamentales del procesamiento de señales, donde tiene amplia utilización. Además, proporciona un medio oportuno para mejorar el rendimiento de los algoritmos para un conjunto de problemas aritméticos comunes.

3.3 Transformada inversa

Si la transformada de Laplace de una función f(t) es F(s), esto es,

$$L[f(t)] = F(s)$$

Entonces f(t) se denomina la transformada inversa de Laplace de F(s) y se escribe como,

$$f(t) = L^{-1}[F(s)]$$

Aquí L-1 es llamado el operador de la transformada inversa de Laplace. Aunque existe una fórmula de inversión compleja la cual proporciona un medio directo para determinar la transformada inversa de Laplace de una función, esta implica un conocimiento amplio de la integración compleja. Sin embargo, no es posible encontrar una transformada inversa de Laplace de todas las funciones por este camino.

Un punto interesante a destacar aquí es que la transformada inversa de Laplace de una función puede no ser única. Por ejemplo, sabemos que la transformada de Laplace de f(t) = 1 es 1/ s. Sin embargo, existe una función más para la que la transformada de Laplace resulta en el mismo término, esta es,

f(t) = 1 si 0 < t < 3

−8 si t = 3

1 si t > 3

Por lo tanto, se puede concluir que la transformada inversa de Laplace de 1/s resulta para dos funciones como se describe anteriormente. Sin embargo, entre las dos, sólo f(t) = 1 es continua, por lo tanto, f(t) = 1 es la única función que tiene la transformada de Laplace como 1/ s.

También es posible escribir una transformada inversa de Laplace en la forma de integración, la cual es llamada integral de Fourier Millen o integral Bromwich o fórmula inversa de Millen. Se trata de una integral de línea y es denotada como,

$$L^{-1}[F(s)] = f(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{T \to \infty} \int_{\gamma - iT}^{\gamma + iT} e^{st} F(s)\, ds$$

3.4 Propiedades

Propiedades de la Transformada Inversa de Laplace

Similar a la transformada de Laplace, la transformada inversa de Laplace también tiene sus propias propiedades. Algunas de las propiedades más importantes se discuten a continuación:

1. Propiedad de Linealidad: Si L{f(t)} = F(s) y L{g(t)} = G(s), entonces para dos constantes cualesquiera c1 y c2 tenemos,

L-1{c1 f(t) + c2 g(t)} = c1 L-1{f(t)} + c2 L-1{g(t)}

= c1f(t) + c2 g(t)

Esto puede probarse como,

Por la propiedad de linealidad de la transformada de Laplace conocemos que,

L{c1 f(t) + c2 g(t)} = c1 F(s) +c2 G(s)

Ahora tomando la transformada inversa de Laplace en ambos lados obtenemos,

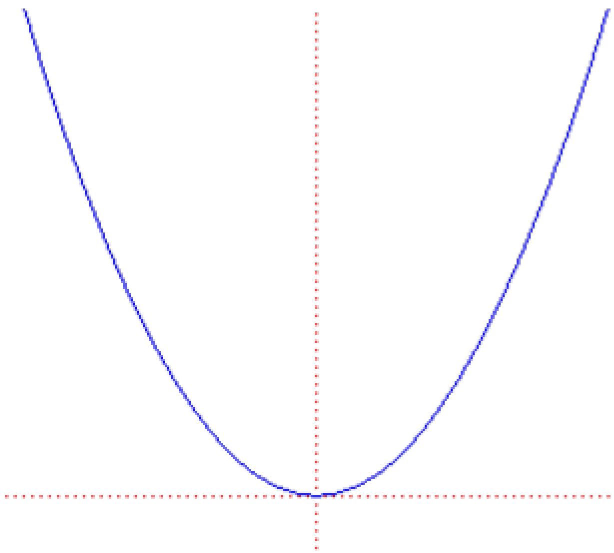
c1f(t) + c2 g(t) = L-1{c1 F(s) +c2 G(s)}

f(t) = L-1{F(s)} y,

g(t) = L-1{G(s)}

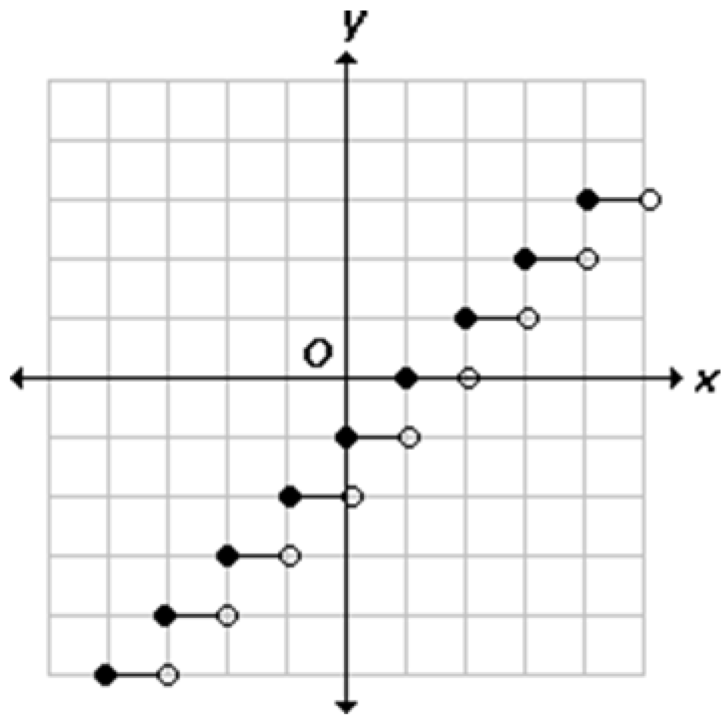
3.4.1 Transformada de Laplace de funciones definidas por tramos

Una función continua a trozos es aquella que es continua y está dividida en pedazos. Antes de sumergirnos en el concepto primero debemos entender lo que es una función continua y una función a trozos. Una función continua es aquella que no se divide en su gráfico, es decir, se define continuamente a lo largo de todo el dominio de la función. Un ejemplo de tal función sería = y2, esta es la ecuación de una parábola.



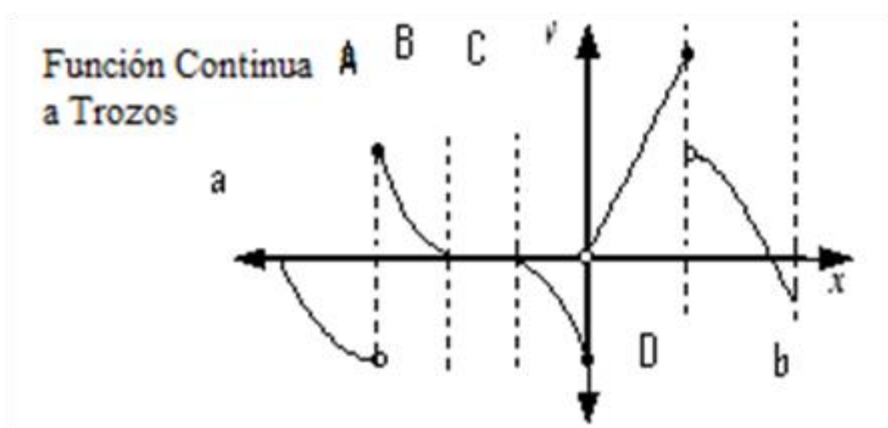
Como podemos ver en el gráfico anterior, esta no se rompe.

Y, una función a trozos es aquella que no está definida continuamente, esto es, la gráfica de la función está dividida. Unejemplo de estoseríaunafunciónescalonada.



Como podemos observar en la imagen de arriba, la función no es continua.

Una función continua a trozoses aquella que combina los dos tipos de funciones. Esta es una combinación muy interesante,porque¿Cómo puede una función ser continua y no continua al mismo tiempo?.El siguiente gráfico haría el concepto claro.



Como se puede observar en el ejemplo anterior, el gráficono es continuo, pero el valor para la función está definido en cada punto, esto se debe a que en varios puntos la gráfica tiene dos valores en lugar de uno, lo cual se divide el gráfico aunque lo mantiene continuo.

Claramente, f(t) es continuo en los intervalos (a, A), (A, B), (C, y), (y, D) y (D, b). También los límites derechose izquierdos de A son,

```
f(A + t) = f(A + 0) = f(A)

f(A - t) = f(A - 0) = f(A)
```

Aquí el valor de t siempre es positivo.

Por lo tanto, podemos concluir que una función continua a trozos se compone de números finitos de secciones de continuidad para cada sub-intervalo finito [0, t] en la gráfica de la función dada. Y el límite de la función dada es finitoa medida que la función se aproxima a cada uno de los puntos continuos.

La transformada de Laplace de tal función está dada como,

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

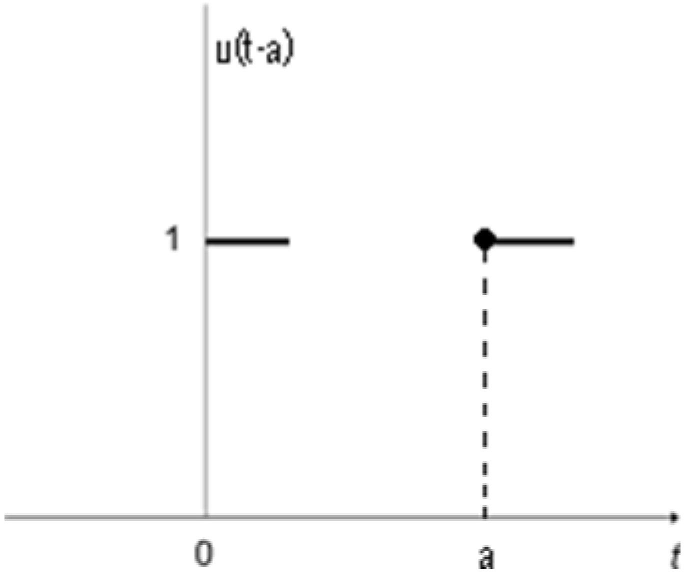
3.4.2 Función escalón unitario

La función escalón unitario o función escalón unitario de Heavisideu(t - a) está definida como,

$$u(t-a) = \begin{cases} 0, t < a \\ 1, t \geq a \end{cases}$$

Aquí el valor de a es siempre mayor o igual que cero.

El gráfico de una función escalón unitario es parecido al siguiente,



Entonces, al observar el gráfico de la función, este se puede comparar con un interruptor que se encuentra cerca de un tiempo en particular, que abre por un tiempo y luego vuelve a cerrar.

Existen ciertas propiedades de una función escalón unitario relacionadas con la transformada de Laplace. Estasse analizan a continuación:

3.4.3 Propiedades de la transformada de Laplace (linealidad, teoremas de traslación)

Propiedades de la Transformada Inversa de Laplace

Similar a la transformada de Laplace, la transformada inversa de Laplace también tiene sus propias propiedades. Algunas de las propiedades más importantes se discuten a continuación:

1. Propiedad de Linealidad: Si L{f(t)} = F(s) y L{g(t)} = G(s), entonces para dos constantes cualesquiera c1 y c2 tenemos,

L-1{c1 f(t) + c2 g(t)} = c1 L-1{f(t)} + c2 L-1{g(t)}

= c1f(t) + c2 g(t)

Esto puede probarse como,

Por la propiedad de linealidad de la transformada de Laplace conocemos que,

L{c1 f(t) + c2 g(t)} = c1 F(s) +c2 G(s)

Ahora tomando la transformada inversa de Laplace en ambos lados obtenemos,

c1f(t) + c2 g(t) = L-1{c1 F(s) +c2 G(s)}

f(t) = L-1{F(s)} y,

g(t) = L-1{G(s)}

3.4.4 Transformada de funciones multiplicadas por tn, y divididas entre t

3.4.5 Transformada de derivadas (teorema)

Al igual que en una función ordinaria, la transformada de Laplace también puede aplicarse al diferencial de una función. En tal situación, colocamosen la fórmula el diferencial de la función en el lugar de la función real para derivar la transformada de Laplace, que es,

$$L[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt$$

Sin embargo, mientras nos ocupamos de los diferenciales de la función, necesitamos modificar el límite inferior de integración y colocar un valor mayor que cero en el lugar de cero, como el límite inferior de integración. Esto se hace principalmente porque el cero no manipula la solución obtenida a partir de la integración, y de esta forma nos limitamos a la función clásica.

Existen, sin embargo, ciertas condiciones para que esto sea verdadero. La función real debe ser definida para la variable tiempo ty el diferencial debe existir para todos los valores mayores que cero. Asimismo, la función debe ser definida de forma continua en el intervalo [0,). De igual manera, el diferencial de esta función debe ser una función continua a trozos para el mismo intervalo, este es, [0,).

Y, por último, tanto la función real, así como el diferencial de la función real deben ser de orden exponencial cuando el valor de t tiende al infinito. Esto significa que deben existir dos números reales positivos M y , y un número T tal que,

$$|f(t)| \leq M e^{\alpha t}$$

Aquí el valor de t debe ser siempre mayor o igual que T.

3.4.6 Transformada de integrales (teorema)

Hasta ahora hemos estudiado la forma de determinar la transformada de Laplace de una función dada. Pero, como sabemos, existen varias operaciones que pueden realizarse en una determinada función. Una de las principales operaciones entre ellas es la integración. Como sabemos, la integración de una función nos da otra función. Por lo tanto, es esencial saber si la técnica de la transformada de Laplacepuede aplicarse a la integral de una función real.

La respuesta a la pregunta anterior es afirmativa, hasta cierto punto. La cláusula de “hasta cierto punto”, se añade aquí porque esto no es cierto para todas las integrales. Existen ciertos pre-requisitos que deben ser verdaderos para obtener la transformada de Laplace de la integral de la función real.

La función real debe estar definida para la variable de tiempot, también la función debe ser definida de forma continua en el intervalo [0,). Asimismo, el integral de esta función debe ser una función continua a trozos para el mismo intervalo, esto es, [0,).

Y, por último, ambas, la función real como el diferencial de la función real deben ser de orden exponencial cuando el valor de t tiende al infinito. Esto significa que deben existir dos números reales positivos M y , un número T tal que,

$$|f(t)| \leq M e^{\alpha t}$$

Aquí el valor de t debe ser siempre mayor o igual que T.

Asumiendo que las condiciones anteriores son válidas para la función de entrada y L{f(t)} = F(s), entonces la transformada de Laplace de la integral de la función real puede darse como,

$$L[\int_0^t f(t)dt] = \frac{1}{s}F(s)$$

3.4.7 Teorema de la convolución

Si L-1{F(s)} = f(t) y L-1{G(s)} = g(t)entonces,

$$L^{-1}[F(s)G(s)] = \int_0^t f(u)g(t-u)du$$

O esta puede ser reescrita como,

$$L^{-1}[F(s)G(s)] = f * g$$

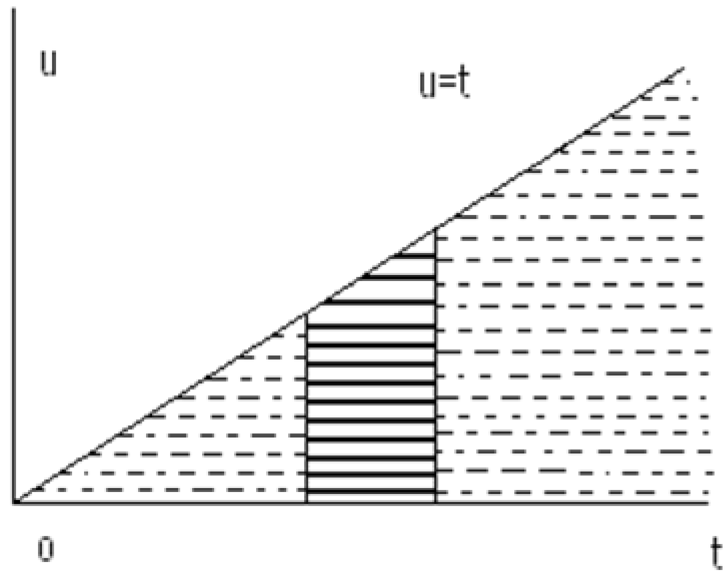
Aquí f * g se llama la convolución de F y G. esto es llamado el teorema de convolución de la transformada de Laplace. Es una propiedad importante de la transformada de Laplace. El teorema anterior indica que puede probarse como,

A partir de la definición de la transformada de Laplace sabemos que,

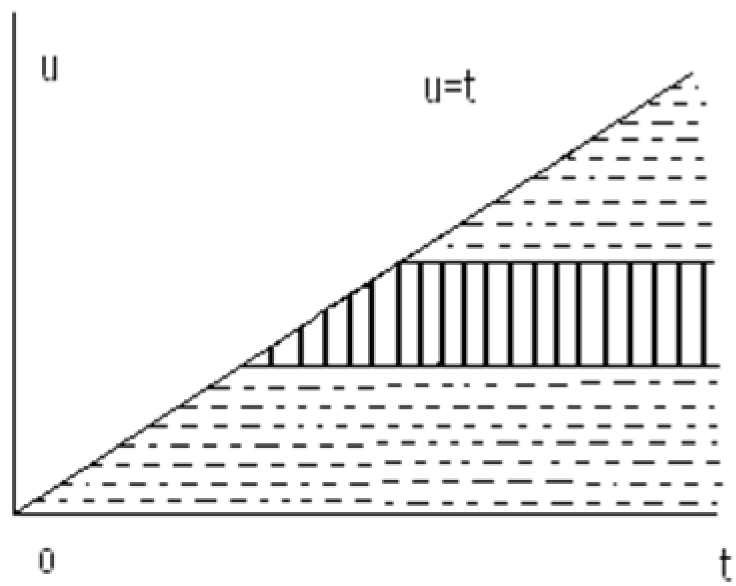
L{ f(u) g(t – u) du} = e-st { f(u) g(t – u) du} dt

= e-stf(u) g(t – u) du dt

Aquí la región de integración es la parte sombreada de la siguiente figura,



Ahora, cambiando el orden de integración, tenemos la siguiente parte sombreada como la región de integración.



Entonces obtenemos,

L{ f(u) g(t – u) du} = e-stf(u) g(t – u) du dt

= f(u) { e-st g(t – u) dt} du

= fijando t – u = v obtenemos, dt = dv

= f(u) { e-s(u + v) g(v) dv} du

= { e-suf(u) du}. e-sv g(v) dv}

O, L{ f(u) g(t – u) du} = F(s) G(s)

Invirtiendo ambos lados de la ecuación obtenemos,

L-1{F(s) G(s)} = f(u) g(t – u) du

L-1{F(s) G(s)} = f * g

Existe una cantidad amplia de problemas que pueden resolverse con la ayuda del teorema de convolución. Uno de estos problemas se da aquí para hacer el concepto más claro.

Usa el teorema de convolución para determinar L-1{1/ [s2 (s + 1)2]}

Sea F(s) = 1/ s2

Y G(s) = 1/ (s + 1)2entonces,

f(t) = L-1{F(s)} = L-1(1/ s2) = t

g(t) = L-1{G(s)} = L-1(1/ (s + 1)2)

= e-t L-1(1/ s2)

= t e-t

Por lo tanto, con la ayuda del teorema de convoluciónpodemos escribir,

L-1{1/ [s2 (s + 1)2]} = f(u) g(t – u) du

= u (t – u) e-(t – u) du

= e-t [t u eudu - u2eu du]

= e-t [t (u eu – eu) - (u2eu) + 2 u eu du]

= e-t [t {(t – 1) et + 1} – t2 et + 2(ueu – eu)]

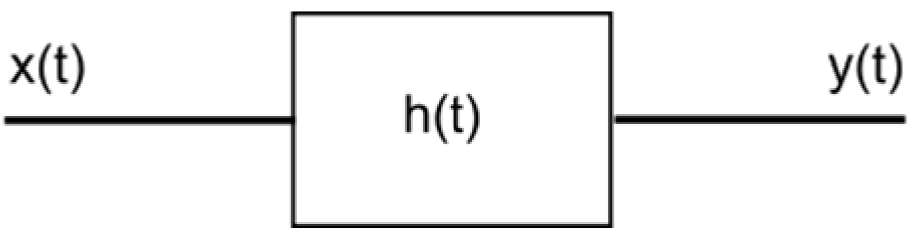
= e-t [t (t – 1) et + t + t2 et + 2(tet – et + 1)]

= e-t [t2 et - tet+ t - t2 et + 2tet - 2et + 2]

= e-t [tet+ t- 2et + 2]

= t + tet– 2 + 2et

El teorema de convolución tiene amplias aplicaciones en la práctica. También se utiliza en la teoría de circuitos para calcular la respuesta al impulso de un circuito concreto.



Aquí x(t) es la entrada del sistema, y(t) es la salida del sistema y h(t) es la respuesta al impulso del sistema.

Por consiguiente, la salida del sistema calculado con la ayuda de la operación de convolución está dada por,

y(t) = x(t) * h(t)

Aquí la función anterior está en el dominio de t, por lo tanto, los cálculos pueden ser algo crípticos,por esto, con el propósito de conveniencia en los cálculos, esta puede ser transformada en el dominio s. La operación de convolución en el dominio s se convierte en la operación de multiplicación.

L{a(t) * b(t)} = A(s) B(s)

3.4.8 Transformada de Laplace de una función periódica

Se dice que una función f(t) es una función periódica de período a> 0 si,

$$f(t) = f(t+a) = f(t+2a) = f(t+3a) = \cdots$$

Esto significa que la gráfica de tal función a repetirá su forma para cada intervalo (na, (n + 1)a). Un ejemplo de tal función es el seno ( ),el cual es una función periódica del período 2 .

El valor de la función debe convertirse en cero en la porción negativa de la recta numérica real.

Si f(t) es una función periódica con período a entonces,

$$L[f(t)] = \frac{1}{1-e^{-st}} \int_{0}^{a} e^{-st} f(t)\,dt$$

Esto puede reorganizarse como,

$$L[f(t)] = \frac{L[f_1(t)]}{1-e^{-st}}$$

En términos simples, podemos decir que para la función periódica f(t) con período a, la transformada de Laplace es equivalente a la transformada de Laplace en un período único de esafunción dividida por el término (1 - e-as).

También existe una prueba del teorema indicado arriba. Dado que f(t) es una función periódica con período a,

f(t + a) = f(t), f(t + 2a) = f(t) y así sucesivamente.

Ahora, L{f(t)} = e-st f(t) dt

= e-stf(t) dt + e-st f(t) dt + e-st f(t) dt + …

Estableciendo t = (u + a) en la segunda integral, t = (u + 2a) en el tercer integral etc. Entonces obtenemos,

= e-stf(t) dt + e-s(u + a) f(u + a) du + e-s(u + 2a) f(u + 2a) du + …

= e-suf(u) du + e-su f(u + a) du + e-2sa e-su f(u) du + …

= (1 + e-as + e-2as+ …) e-su f(u) du

= (1 - e-as)−1 e-stf(t) dt [Dado que 1 + x + x2 + … = (1 – x)−1]

L{f(t)} = [1/ (1 - e-as)] e-st f(t) dt

Por consiguiente, podemos ver que para llevar a cabo la operación de transformación de Laplace a una función periódica necesitamos romper esa función en los sub-intervalos, lo cual depende de los intervalos para los cuales la función dada estádefinida. La sumatoria de todas las integrales produce la transformada de Laplace para esa función.

Sin embargo, es posible aplicar directamente el teorema discutido anteriormentecon propósitos de conveniencia para la solución de problemas. Se provee un ejemplo ilustrando el uso de este teorema para hacer más claro los conceptos.

Muestra que si $f(t + a) = -f(t)$, entonces,

$L\{f(t)\} = [1/ (1 + e^{-as})] e^{-st} f(t) dt$

Dado que$f(t + 2a) = f[(t + a) + a)] = -f(t + a)$

$= -[-f(t)] = f(t)$

La función $f(t)$ dada es una función periódica con período $2a$.

Ahora, utilizando el teorema para la transformada de Laplace de funciones periódicas con el período areemplazado por $2a$ tenemos que,

$L\{f(t)\} = [1/ (1 - e^{-2as})] e^{-st} f(t) dt$

$= [1/ (1 - e^{-2as})] [e^{-st}f(t) dt + e^{-st} f(t) dt]$

Estableciendo $t = (u + a)$ en la segunda integral, tenemos que

$L\{f(t)\} = [1/ (1 - e^{-2as})] [e^{-st} f(t) dt + e^{-s(u + a)} f(u + a) du]$

$= [1/ (1 - e^{-2as})] [e^{-st}f(t) dt – e^{-as} e^{-su} f(u) du]$

$= [(1 - e^{-as})/ (1 - e^{-2as})] e^{-st}f(t) dt$

$L\{f(t)\} = [1/ (1 + e^{-as})] e^{-st} f(t) dt$

3.4.9 Función delta Dirac.

Las funciones deltade Dirac son las funciones que ejercen una enorme cantidad de fuerza sobre un objeto, por una gran cantidad de tiempo. Aunque a veces una función escalonada unitaria es comparada con una función fuerza, la comparación no es muy adecuada dado que la cantidad de fuerza ejercida por ellas es muy limitada. Una función delta de Dirac es una diferencial de la función escalón unitario. Esta puede entenderse como secuencias delta de funciones de fuerza generalizadas.

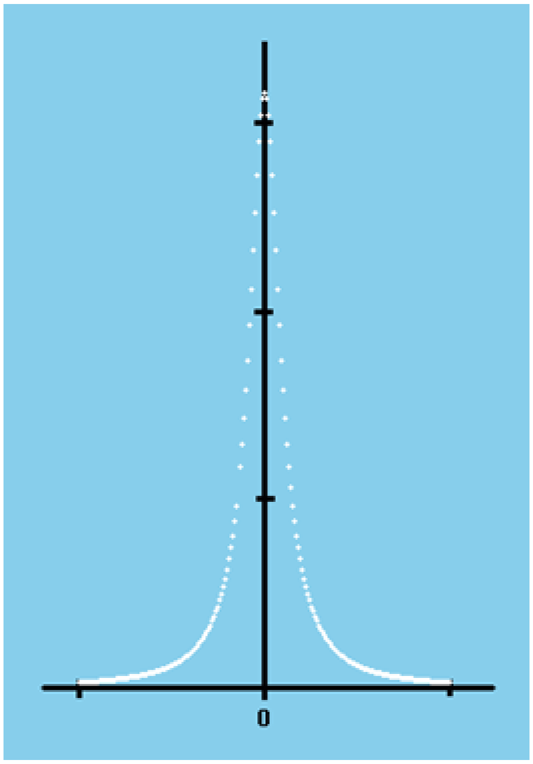
$$\frac{d}{dt}[H(t)] = \delta(t)$$

Esto implica que la función delta de Dirac no es una función real sino que es una distribución que se extiende por un intervalo definido para la función dada. También es llamada una función singular. Como tal, no existe una definición formal de esta función. Pero puede ser definida mediante utilizar la propiedad de la propia función, la cual es,

$$\delta(t) = \begin{matrix} 0, t \neq 0 \\ \infty, t = 0 \end{matrix}$$

En términos simples, podemos decir que una función delta de Dirac es aquella cuya salida se calcula a cero para cada valor del argumento de entrada, excepto cuando el valor del argumento de la función en sí es igual a cero. Aquí el argumento de la función es un parámetro valorado real. La integral de la función en el rango de parámetros (- ,) es uno. A la luz de la afirmación anterior, podemos concluir que esta es una función real desde el punto de vista matemático, ya que para cualquier función real cuyo valor es constante, excepto en un punto, el valor de la integral debe calcularse a cero, el cual no es este caso.

La gráfica de la función se vería algo así como:



Debido a esta propiedad de la función, es ampliamente utilizada para modelar el sistema que experimenta fuerzas extremasrepentinas.

Una propiedad muy importante de esta función es,

$$\int f(t)\delta(t)dt = f(0)$$

En este caso, sabemos que la función (t) toma el valor de cero para todos los valores de t, excepto en t = 0. Esto implica que el valor de la función f(t) también se vuelve insignificante, excepto cuando el argumento tde la función se convierte en cero. En tal situación, tenemos el valor del integrando f(0) (t), f(0)que puede tomarse fuera dado que se convierte en una constante, haciéndolo de esta manera obtenemos el lado derecho de la ecuación.

Por lo tanto, podemos pensar en (t) dt como el operador funcional que saca el valor de la función cuando el argumento de la función es igual a cero.

Otra forma popular de definir una función delta de Dirac es una medida, ya que la función delta de Dirac tiene como su argumento un subconjunto de los números realesS, es decir, S R. Aquí, el valor de S es cero cuando la salida de la función es uno o infinita y en otro caso, el subconjunto S puede tomar elementosinfinitos.

Veamos ahora un ejemplo de la función delta de Dirac.

Resuelve y' + 2y' – 15y = 6 (t – 9) dados y(0) = −5 ey'(0) = 7

Aplicando la transformada de Laplace para la función dada obtenemos,

s2Y(s) – sy(0) – y'(0) + 2(sY(s) – y(0)) – 15Y(s) = 6e-9s

= (s2 + 2s – 15)Y(s) + 5s + 3 = 6e-9s

Resolviendo la ecuación anterior obtenemos,

Y(s) = 6e-9s F(s) – G(s)

Ahora haciendo uso de las fracciones parciales para obtener la transformada inversa de Laplace como,

F(s) = 1/ [(s + 5) (s – 3)]

= [(1/ 8)/ (s – 3)] – [(1/ 8)/ (s + 5)]

f(t) = (1/8) e3t - (1/8)e-5t

G(s) = [5s + 3/(s + 5) (s – 3)]

= [(9/4)/ (s – 3)] + [(11/4)/ (s + 5)]

f(t) = (9/4) e3t - (11/4)e-5t

Por lo tanto, la solución es

Y(s) = 6e-9s F(s) – G(s)

3.4.10 Transformada de Laplace de la función delta Dirac

Una función delta de Dirac es una función especial cuyo valor es cero en todos los puntos, excepto en un punto, este es cuando el argumento de la función es igual a cero. Esto se denota como,

$$\delta(t) = \begin{matrix} 0, t \neq 0 \\ \infty, t = 0 \end{matrix}$$

Cambiemos la función delta de Dirac por una constante, digamos c. Entonces ahora la definición de esta función delta de Dirac desplazada es,

(t – c) = 0,   t <> c

= ,   t = c

Esto es sólo una pseudodefinición de la función. Ahora bien, si derivamos el área de la función para los límites de integración (- ,), y resulta ser uno, esto es,

(t – c) dt = 1

Se trata de una derivación importante y esta también nos da la noción de pseudoinfinidad,como en la definición función delta de Diracdesplazada. Aquí, la palabra pseudo se utiliza ya que pueden existir diferentes medidas del infinito mediante tomar un producto del infinito con un número entero. Para entenderlo, integremos el producto de la función delta de Dirac y un entero, digamos dos para los mismos límites de integración, esto es, (- ,).

2 (t – c) dt

Uno podría suponer que la salida de la integración debería ser igual a dos, ya que,

= 2 (t – c) dt

= (2) (1)

= 2

Es decir, si la función delta de Dirac se multiplica por dos, el infinito sería dos veces más grande que antes.

Ahora, multiplicando la función delta de Dirac desplazada por alguna otra función,digamos f(t) y tomando la transformada de Laplace de esta, es decir,

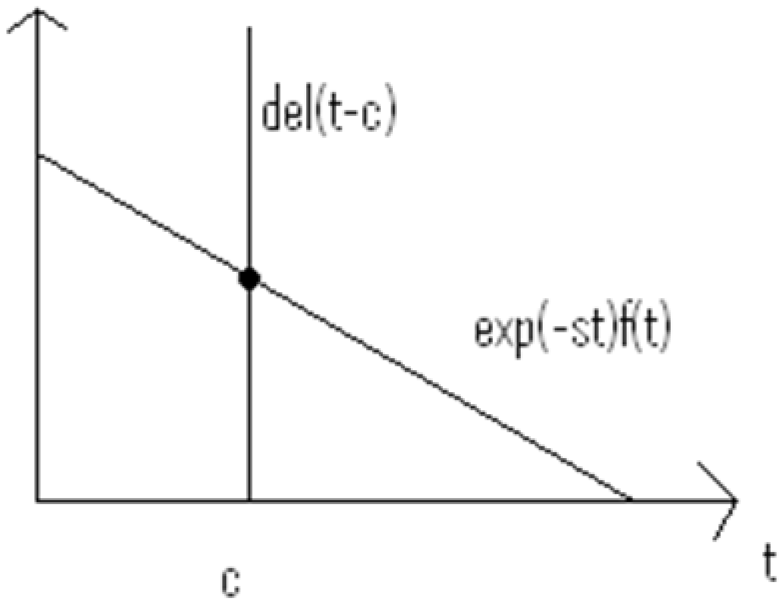
L{ (t – c) f(t)}

En el caso de que uno desee determinar únicamente la transformada de Laplace de la función delta de Dirac desplazada, asumimos que el valor de f(t) es uno.

Esto es, tenemos,

e-st f(t) (t – c) dt

Como sabemos, el proceso de integración nos da el área de la función que está siendo integrada. Por lo tanto, primero dibujemos el área de las dos funciones para averiguar qué área estamos determinando realmente. Mientras lo hacemos,asume que f(t) es arbitrario. Por tanto, tenemos el gráfico de la función como,



Aquí se dibuja una línea recta donde t = c ya que el valor de la función delta de Dirac es siempre cero, excepto en t = c. Por lo tanto, el espacio común de las dos curvas, cuyo valor será determinado por la operación de integración viene a ser un solo punto, el cual es el punto de intersección de las dos curvas, y el valor de la primera función en ese punto en seráe-sc f©. Este es sólo un punto, el cual tiene un valor constante.

En consecuencia, tenemos un término constante dentro de la operación de integración que se puede mover fuera y, por lo tanto, quedamos con,

e-sc f© (t – c) dt

Como sabemos, el valor de la integral (t – c) dtes uno, por esto, la transformada de Laplace de la función delta de Dirac desplazada es e-sc f©. Esto nos da la transformada de Laplace de la función delta de Dirac, donde el valor de c = 0 y f(t) = 1, como,

L{ (t)} = e0 (1) = 1

L{ (t - c)} = e-cs (1) = e-cs

3.5 Solución de ecuaciones

La transformada de Laplace es especialmente útil para obtener la solución de las ecuaciones diferenciales ordinarias no homogéneas con coeficientes constantes, donde todas las condiciones de contorno se dan para la función desconocida y sus diferencias en un solo punto. El procedimiento de trabajo de la misma es la siguiente:

Sea el problema de valores iniciales dado como,

$$\frac{d^2y}{dt^2}+a_1\frac{dy}{dt}+a_2y=f(t)$$

(i)

Donde y(0) = k0 e y'(0) = k1. Además a1, a2, k0, k1son todos constantes y f(t) es función de t solamente.

1. Aplicando la transformada de Laplace en ambos lados de la ecuación (i) tomando en cuenta que

L(d2y/ dt2) = s2Y(s) – sy(0) – y'(0) y,

L(dy/ dt) = sY(s) – y(0)

Donde, Y(s) = L{y(t)} e F(s) = L{f(t)}

Entonces, la ecuación (i) produce,

[s2Y(s) – sy(0) – y'(0)] + a1[sY(s) – y(0)] + a2Y = F(s)

Ahora, haciendo uso de las condiciones iniciales tenemos que,

(s2 + a1s + a2) Y(s) = F(s) + sk0 + k1 + a1k0 (ii)

2. Resuelve la ecuación (ii) y luego expresa el lado derecho como una sumatoria de fracciones parciales.

Aplica la transformada inversa de Laplace a Y(s), obtenida en el paso anterior. Esto dará la solución de la ecuación dada (i) con condiciones iniciales,

$y(t) = L-1\{Y(s)\}$

El procedimiento anterior también puede aplicarse a las ecuaciones diferenciales ordinariasde orden superior.

Ahora demos un vistazo a un ejemplo ilustrativo en la categoríaanterior.

Resuelve $y'' + 2y' + 5y = e-t \sin (t)$ dados $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$.

Al tomar la transformada de Laplace de ambos lados conseguimos,

$L\{y''\} + L\{2y'\} + L\{5y\} = L\{e-t \sin (t)\}$

O, $[s2Y(s) – sy(0) – y'(0)] + 2[sY(s) – y(0)] + 5Y = [1/ ((s + 1)2 + 1)]$

Usando $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$ tenemos,

$(s2 + 2s + 5) Y(s) – 1 = [1/ (s2 + 2s + 2)]$

$Y(s) = [1/ (s2 + 2s + 2) (s2 + 2s + 2)] + [1/ (s2 + 2s + 2)]$

$= (1/ 3) \{[1/ (s2 + 2s + 2)] – [1/ (s2 + 2s + 2)]\} + [1/ (s2 + 2s + 2)]$

$= (1/ 3) [1/ (s2 + 2s + 2)] + (2/ 3) [1/ (s2 + 2s + 2)]$

$= (1/ 3) [1/ ((s + 1)2 + 1)] + (2/ 3) [1/ ((s + 1)2 + 4)]$

Invirtiendo ambos ladostenemos,

$y(t) = (1/ 3) L-1[1/ ((s + 1)2 + 1)] + (2/ 3) L-1[1/ ((s + 1)2 + 4)]$

$= (1/3)\, e^{-t}\, L^{-1}[1/(s^2 + 1)] + (2/3)\, e^{-t}\, L^{-1}[1/(s^2 + 4)]$ [Utilizando el primer teorema de desplazamiento]

$= (1/3)\, e^{-t} \sin(t) + (1/3)\, e^{-t} \sin(2t)$

$= (1/3)\, e^{-t} (\sin(t) + \sin(2t))$

La transformada de Laplace también puede utilizarse para resolver un sistema de n ecuaciones diferenciales ordinarias simultáneas en n variables dependientes, las cuales son funciones de la variable independiente t.

Considera un sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias simultáneas en dos variablesdependientes x e y, las cuales son funciones de t.

$(a_1D^2 + a_2D + a_3)x + (a_4D^2 + a_5D + a_6)y = f_1(t)$

$(b_1D^2 + b_2D + b_3)x + (b_4D^2 + b_5D + b_6)y = f_2(t)$

Aquí $D = (d/dt)$ y las condiciones iniciales son$x(0) = c_1$, $x'(0) = c_2$, $y(0) = c_3$, $y'(0) = c_4$. También $a_i(i = 1,)$, $b_i(i = 1,)$, $c_i(i = 1,)$ son constantes. El procedimiento de trabajo de la misma es la siguiente:

1. Aplicando la transformada de Laplace a ambos lados de las dos ecuaciones diferenciales ordinarias dadas, obtenemos

$\{a_1[s^2X(s) - sx(0) - x'(0)] + a_2[sX - x(0)] + a_3X\} + \{a_4[s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)] + a_5[sY - y(0)] + a_6Y\} = F_1(s)$

$\{b_1[s^2X(s) - sx(0) - x'(0)] + b_2[sX - x(0)] + b_3X\} + \{b_4[s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)] + b_5[sY - y(0)] + b_6Y\} = F_2(s)$

O, $(a_1s^2 + a_2s + a_3)X + (a_4s^2 + a_5s + a_6)Y = F_1(s) + s(a_1c_1 + a_4c_3) + (a_1c_2 + a_2c_1 + a_4c_4 + a_5c_3)$

$(b1s2 + b2s + b3)X + (b4s2 + b5s + b6)Y = F2(s) + s(b1c1 + b4c3) + (b1c2 + b2c1 + b4c4 + b5c3)$

Donde, $X(s) = L\text{-}1\{x(t)\}$

$Y(s) = L\text{-}1\{y(t)\}$